FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Esercizi svolti dal prof. Gianluigi Trivia

Prima di affrontare le funzioni esponenziali e logaritmiche comprensive della risoluzione delle equazioni e disequazioni, richiamiamo velocemente le potenze e le loro proprietà nell'insieme dei numeri reali, quindi anche con esponenti razionali e irrazionali.

Esercizio 1. Determinare per quale valore del parametro a le seguenti potenze con esponente irrazionale hanno significato.

$$(2-3a)^{\sqrt{2}} \quad (a+1)^{3-\pi} \quad \left(a^2+\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}$$

Soluzione. Ricordiamo che la funzione esponenziale è definita quando la base della potenza è positiva, differenziando i casi $a>1$ e $0<a<1$. Gli esponenti possono essere anche negativi, in quanto $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$.

Per $(2-3a)^{\sqrt{2}}$, dovremo avere $2-3a\geq 0$, cioè $a\leq\frac{2}{3}$ (possiamo considerare anche la base nulla perché l'esponente è sicuramente diverso da zero)

Per $(a+1)^{3-\pi}$, avremo $a+1>0$, cioè $a>-1$; osserviamo che l'esponente è negativo, cioè $3-\pi<0$, per cui la base non può essere nulla

Per $\left(a^2+\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}$, la base di questa potenza è sempre positiva essendo la somma di due quantità positive, per cui $\forall a\in\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Determinare per quale valore del parametro a le seguenti potenze con esponente irrazionale hanno significato.

$$\left(a^2-6a+9\right)^{-\pi} \quad \left(a-a^2\right)^{1-\sqrt{2}} \quad \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Soluzione. Per $\left(a^2-6a+9\right)^{-\pi}$, si ha $a^2-6a+9=(a-3)^2>0$, cioè $a\neq 3$ (la base non può essere nulla essendo l'esponente negativo

Per $\left(a-a^2\right)^{1-\sqrt{2}}$, si ha $a-a^2>0$, cioè $0<a<1$; anche qui l'esponente è negativo

Per $\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, si ha $\frac{a}{a+1}>0$, cioè $a<-1\vee a\geq 0$; qui la base può anche essere nulla, essendo l'esponente positivo; $a=-1$ non accettabile per le C.E. della frazione

Esercizio 3. Semplificare le seguenti espressioni con potenze con esponenti irrazionali

$$3^{\sqrt{32}}\cdot 3^{3\sqrt{2}}:3^{2\sqrt{8}} \quad \sqrt{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{6}}\cdot\left(7^{\sqrt{3}}\right)^{-2}} \quad \left(\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}}\cdot\left(\sqrt{2}^{\frac{\sqrt{3}}{6}}\right)\right)^{\sqrt{3}} \quad \frac{3^\pi\cdot 4^{\pi-1}}{6^\pi\cdot 2^{\pi+1}}$$

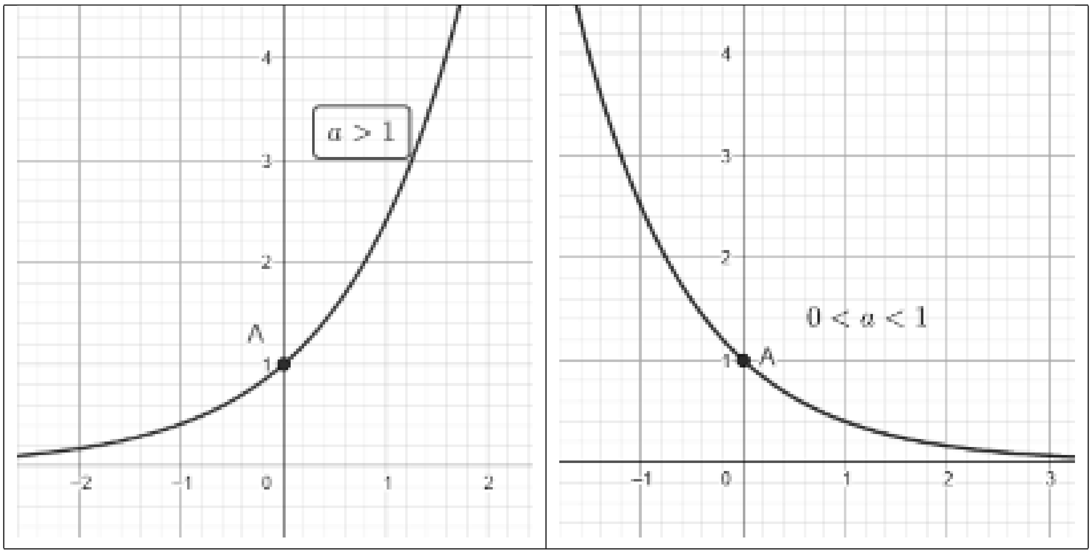
Soluzione. $3^{\sqrt{32}}\cdot 3^{3\sqrt{2}}:3^{2\sqrt{8}}=3^{4\sqrt{2}}\cdot 3^{3\sqrt{2}}:3^{4\sqrt{2}}=3^{\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)}=3^{3\sqrt{2}}$

$\sqrt{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{6}}\cdot\left(7^{\sqrt{3}}\right)^{-2}}=\sqrt{3^{\sqrt{12}}\cdot 7^{-2\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{3^{2\sqrt{3}}}{7^{2\sqrt{3}}}}=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{2\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}}$

$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}}\cdot\left(\sqrt{2}^{\frac{\sqrt{3}}{6}}\right)\right)^{\sqrt{3}}=\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}}\right]^{\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{4}{6}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

$\frac{3^\pi\cdot 4^{\pi-1}}{6^\pi\cdot 2^{\pi+1}}=\frac{3^\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^\pi}{3^\pi\cdot 2^\pi\cdot 2^{\pi+1}}=\frac{12^\pi\cdot\frac{1}{4}}{6^\pi\cdot 2^\pi\cdot 2}=\frac{\cancel{12^\pi}\cdot\frac{1}{4}}{\cancel{12^\pi}\cdot 2}=\frac{1}{8}$

Breve riesame della funzione esponenziale. La funzione si esprime nella forma $y=a^x$, dove la variabile x compare all'esponente. Non si definiscono potenze con base reale negativa. Si distinguono altresì i casi $0<a<1$ e $a>1$. Rappresentiamo graficamente la funzione nei due casi, per far cogliere le proprietà di questa funzione, senza ulteriori precisazioni.



Esercizio 4. Determinare per quali valori di k le seguenti funzioni sono crescenti

$$y=\left(k^2-2k-2\right)^x \quad y=\left(\frac{k^2+3k+5}{k+5}\right)^x$$

Soluzione. Primo caso: $y=\left(k^2-2k-2\right)^x$. La funzione è crescente (si veda la figura di sx) se la base è maggiore di uno; pertanto

$$k^2-2k-2>1 \quad k^2-2k-3>0$$

$$k<-1 \vee k>3$$

Secondo caso: $\dfrac{k^2+3k+5}{k+5}>1$, $\dfrac{k^2+3k+5-k-5}{k+5}>0$

$$\frac{k^2+2k}{k+5}>0$$

risolviamo la disequazione fratta

$$\begin{array}{ll} N>0 & k<-2 \vee k>0 \\ D>0 & k>-5 \end{array} \qquad .5<k<-2 \vee k>0$$

Dominio delle funzioni.

Esercizio 5. Determinare il dominio delle seguenti funzioni

$$y=7^{x^2-1} \qquad y=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}} \qquad y=\left(\tfrac{5}{3}\right)^{\frac{\sqrt{x}}{x-3}}$$
$$y=(x-2)^{\sqrt{5-x}} \quad y=\left(\tfrac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \quad y=\left(x^2-2x+1\right)^{\sqrt{x-1}}$$

Soluzione. Il dominio di una generica funzione esponenziale del tipo $y=a^x$, con le condizioni già specificate riguardanti la base, è $D:\forall x\in\mathbb{R}$.

Nel primo caso $y=7^{x^2-1}$, avremo, essendo l'esponente sempre definito e la base >1, $D:\forall x\in\mathbb{R}$

Nel secondo caso $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}}$, dovremo porre $x\neq-2$, affinché il denominatore della frazione non si annulli, per cui, $D:\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

Nel terzo caso, $y=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{\sqrt{x}}{x-3}}$ va studiata la frazione che rappresenta l'esponente, richiedendo che la radice esista, cioè $x\geq 0$ e che anche il denominatore non si annulli, cioè $x\neq 3$, per cui

$$D:[0;3)\cup(3;+\infty)$$

Nel quarto caso $y=(x-2)^{\sqrt{5-x}}$, dovremo porre

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>2 \\ x\leq 5 \end{cases} \quad D:(2;5]$$

Nel quinto caso $y=\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, frazione maggiore di zero e denominatore dell'esponente maggiore di zero

$$\begin{cases} \frac{x}{x-1}>0 \\ x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \vee x>1 \\ x>0 \end{cases} \quad D:(1;+\infty)$$

Nel sesto caso $y=\left(x^2-2x+1\right)^{\sqrt{x-1}}$ avremo

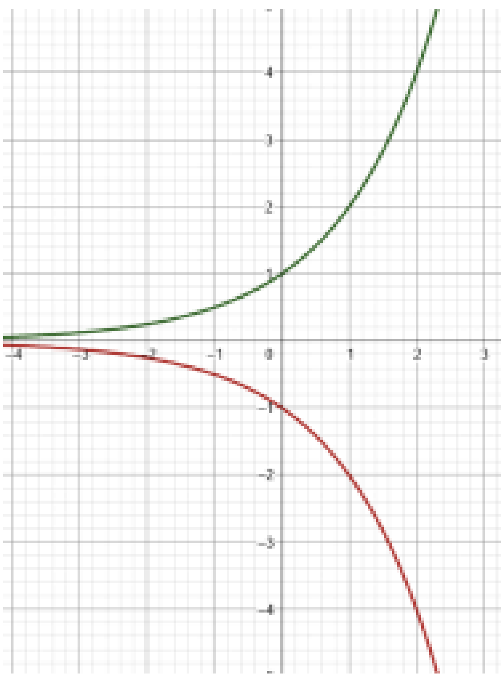
$$\begin{cases} (x-1)^2>0 \\ x>1 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall x\neq 1 \\ x>1 \end{cases} \quad D:(1;+\infty)$$

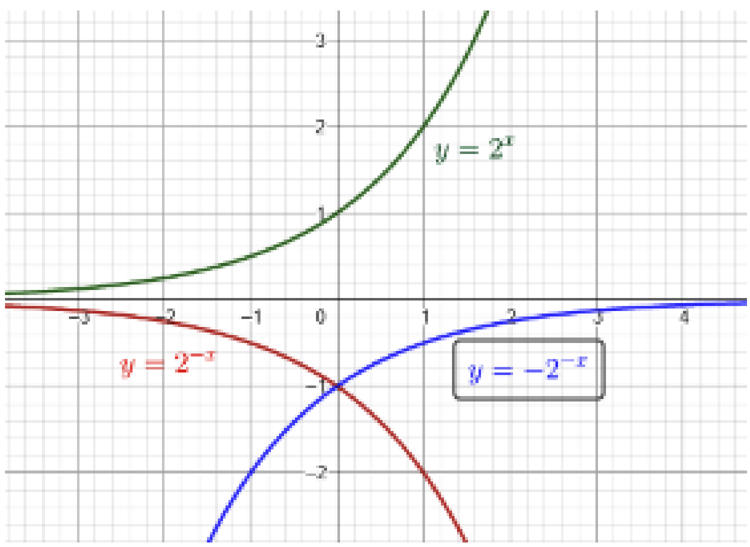
Trasformazione delle curve esponenziali.

Esercizio 6. Partendo dal grafico di $y=a^x$, dedurre, utilizzando opportune trasformazioni geometriche, il grafico delle funzioni $y=-2^x$ e $y=-2^{-x}$

Soluzione. Prima funzione $y=-2^x$. Partendo dalla funzione di base $y=2^x$ si determina poi la funzione $y=-2^x$, cambiando di segno tutti i valori di y; questa è quindi una simmetria rispetto all'asse x, caratterizzata dalle equazioni $x'=x$ e $y'=-y$

Seconda funzione $y=-2^{-x}$. Determiniamo la funzione con i seguenti passaggi: grafico di 2^x, poi grafico di $2^{-x}=\frac{1}{2^x}$ (simmetrica rispetto all'asse y) e infine la simmetrica rispetto all'asse x. Le due simmetrie assiali con assi perpendicolari si compongono in una simmetria centrale con centro nell'origine.

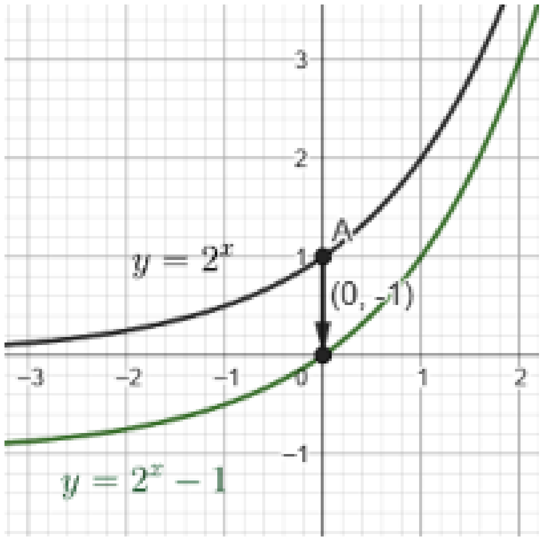


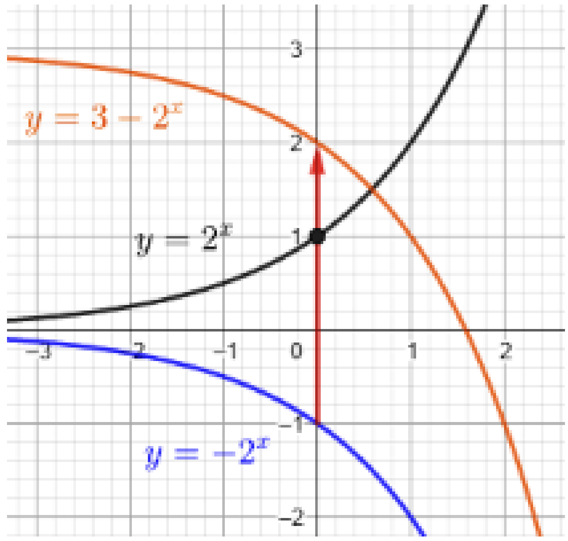


Esercizio 7. Partendo dal grafico di $y=a^x$, dedurre, utilizzando opportune trasformazioni geometriche, il grafico delle funzioni $y=2^x-1$ e $y=3-2^x$.

Soluzione. Prima funzione $y=2^x-1$. Alla funzione di base $y=2^x$ si applica una traslazione verticale verso il basso. I valori di x rimangono invariati, i corrispondenti valori di y diminuiscono tutti di una unità.

Seconda funzione $y=3-2^x$. Prima si determina la curva simmetrica rispetto all'asse x (inversione dei valori di y), poi si esegue una traslazione verticale verso l'alto di tre unità, per cui le x rimangono invariate e i corrispondenti valori di y sono aumentati di tre unità. Qui sotto i due grafici.

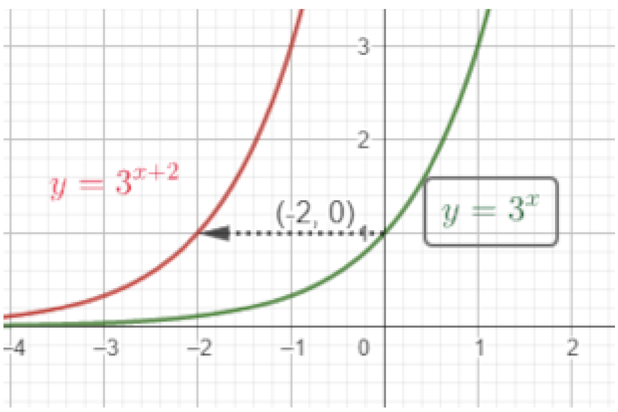


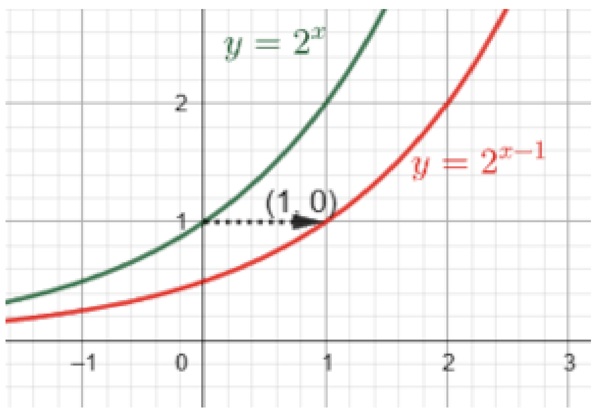


Esercizio 8. Partendo dal grafico di $y=a^x$, dedurre, utilizzando opportune trasformazioni geometriche, il grafico delle funzioni $y=3^{x+2}$ e $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.

Soluzione. Prima funzione $y=3^{x+2}$. In questo caso si ha una traslazione orizzontale verso sinistra di due unità, quindi di vettore $\overrightarrow{v}(-2;0)$.

Seconda funzione $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}=2^{x-1}$. Anche qui si ha una traslazione orizzontale verso destra di una unità, cioè di vettore $\overrightarrow{v}(1;0)$. Qui sotto i due grafici.

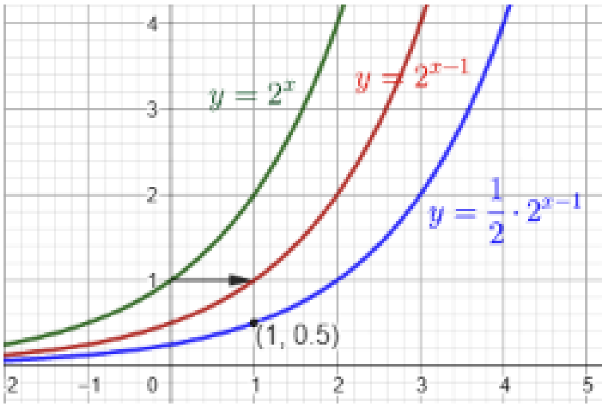


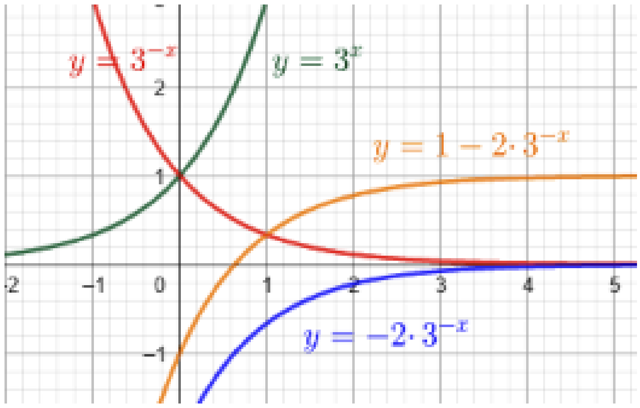


Esercizio 9. Partendo dal grafico di $y=a^x$, dedurre, utilizzando opportune trasformazioni geometriche, il grafico delle funzioni $y=\frac{1}{2}\cdot 2^{x-1}$ e $y=1-2\cdot 3^{-x}$.

Soluzione. Prima funzione $y=\frac{1}{2}\cdot 2^{x-1}$. In questo caso 2^{x-1} rappresenta una traslazione orizzontale verso destra di una unità, quindi di vettore $\overrightarrow{v}(1;0)$; successivamente i valori ottenuti dell'ordinata y andranno moltiplicati per $\frac{1}{2}$, e questa sarà rappresentata da una dilatazione verticale di coefficiente $\frac{1}{2}$.

Seconda funzione $y=1-2\cdot 3^{-x}$. Data la funzione $y=3^x$, si ha una simmetria rispetto rispetto all'asse y che restituisce $y=3^{-x}$, si applica poi una dilatazione verticale di coefficiente -2 e infine una traslazione verticale di vettore $\overrightarrow{v}(0;1)$. Qui sotto i due grafici con le diverse fasi della loro costruzione.

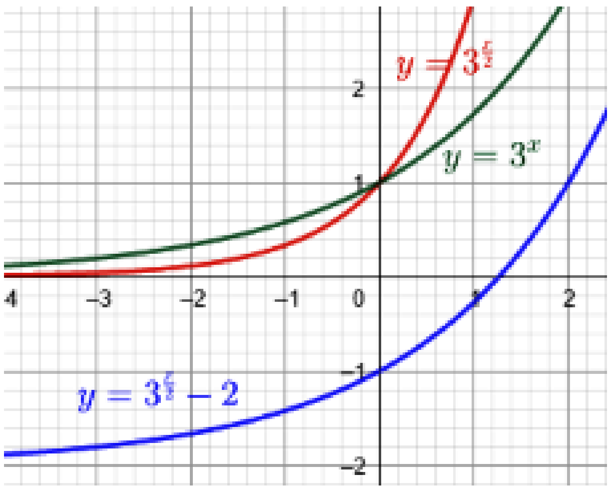


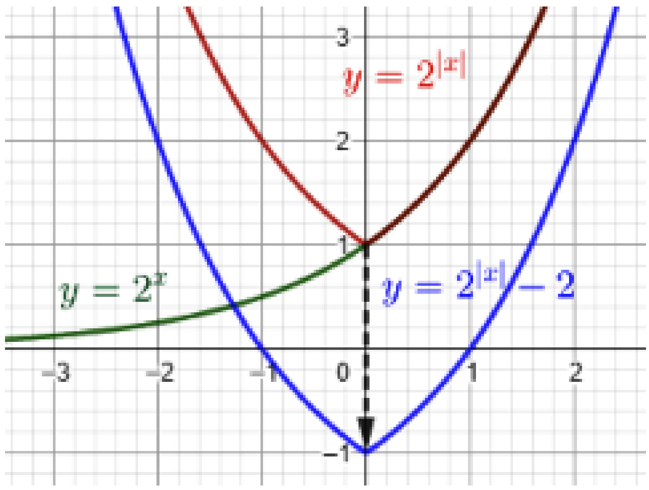


Esercizio 10. Partendo dal grafico di $y = a^x$, dedurre, utilizzando opportune trasformazioni geometriche, il grafico delle funzioni $y = 3^{\frac{x}{2}} - 2$ e $y = 2^{|x|} - 2$.

Soluzione. Prima funzione $y = 3^{\frac{x}{2}} - 2$. In questo caso alla funzione base 3^x si applica una dilatazione orizzontale di coefficiente $\frac{1}{2}$ e successivamente si trasla verticalmente la funzione ottenuta di due unità verso il basso , quindi di vettore $\overrightarrow{v}(0; -2)$.

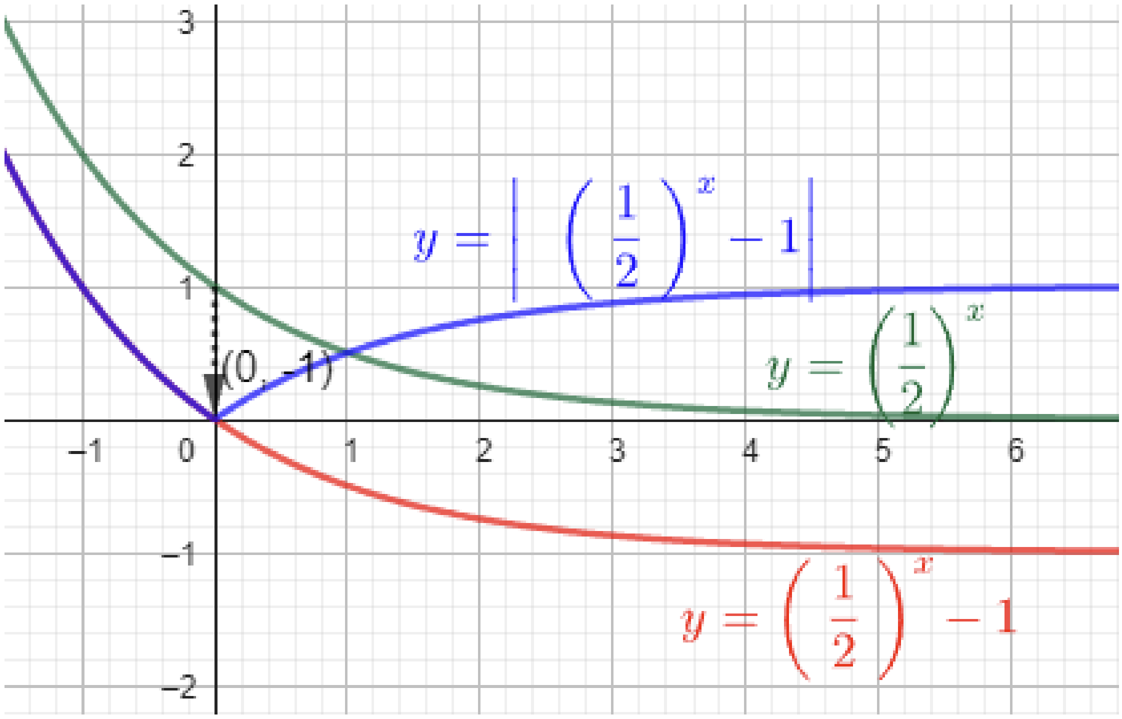
Seconda funzione $y = 2^{|x|} + 1$. Data la funzione $y = 2^x$, si ha una simmetria rispetto rispetto all'asse y del ramo della funzione che corrisponde ai valori positivi della x e infine una traslazione verticale di vettore $\overrightarrow{v}(0; -2)$. Qui sotto i due grafici con le diverse fasi della loro costruzione.





Esercizio 11. Partendo dal grafico di $y = a^x$, dedurre, utilizzando opportune trasformazioni geometriche, il grafico della funzione $y = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \right|$

Soluzione. In questo caso alla funzione base $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ si applica una traslazione verticale di vettore $\overrightarrow{v}(0; -1)$ e poi la simmetrica della parte associata ai valori di $y < 0$ rispetto all'asse x.



Esercizio 12. La pressione atmosferica diminuisce secondo la legge

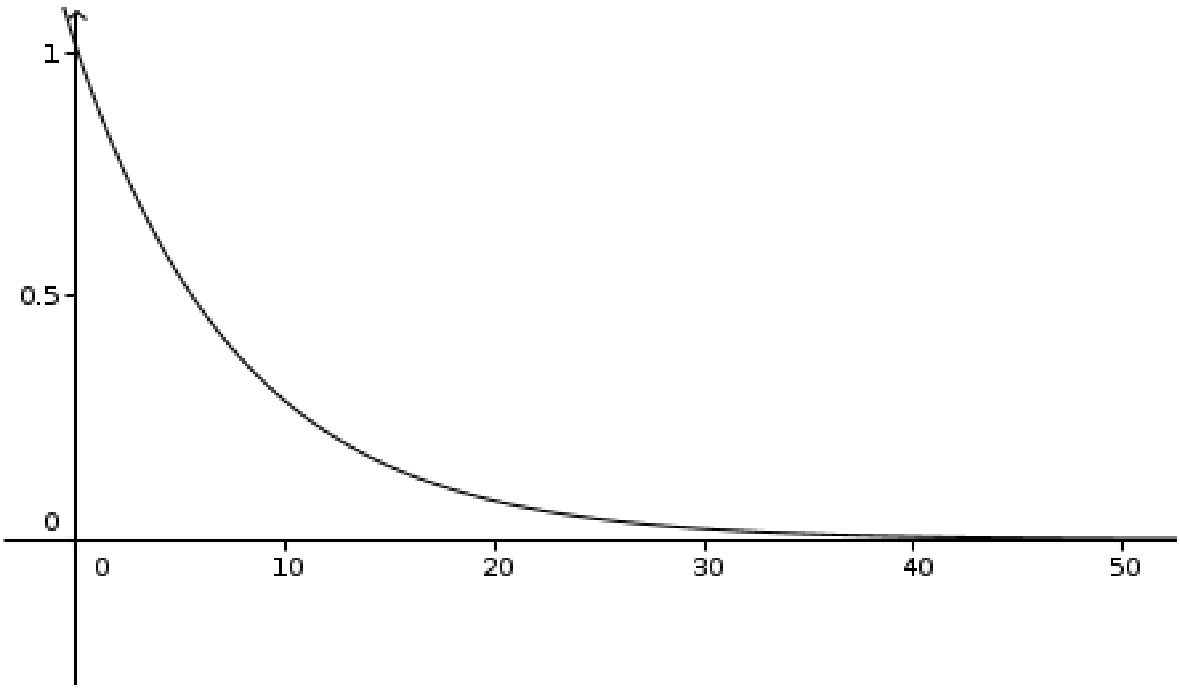
$$p = 1{,}013e^{-0.127h}$$

Rappresenta graficamente

Soluzione l'unica difficoltà di questo esercizio riguarda la scelta delle unità di misura. L'asse x deve contenere valori da 0 a 50 mentre l'asse y avrà come valore massimo $1{,}013$ (infatti per $h = 0$, $p = 1{,}013$). Costruendo la tabella si ha

h	0	10	20	50
p	1,013	0,284	0,08	0,002

il grafico risulta pertanto



EQUAZIONI ESPONENZIALI

Esercizio 13. Risolvi la seguente equazione esponenziale nella quale si ha il confronto tra due esponenziali aventi la stessa base, $2^{2x+1} = 2^{3+x}$

Soluzione. $2^{2x+1} = 2^{3+x}$; due potenze sono uguali se hanno uguali la base e l'esponente, per cui

$$2x+1 = 3+x \quad x = 2$$

Esercizio 14. Risolvi la seguente equazione esponenziale $7^{x-4} = 49$

Soluzione. Le due potenze non hanno in apparenza la stessa base, ma $4 = 7^2$, per cui la si può riscrivere come $7^{x-4} = 7^2$; e quindi

$$x-4 = 2 \quad x = 6$$

Esercizio 15. Risolvi la seguente equazione esponenziale $3^{-3x} = \frac{1}{9}$

Soluzione. Per scrivere le due potenze con la stessa base ricordiamo che $\frac{1}{9} = 3^{-2}$, per cui

$$-3x = -2 \quad x = \frac{2}{3}$$

Esercizio 16. Risolvi la seguente equazione esponenziale $\left(a^{1+x}\right)^{1-x} = \frac{1}{a^3}$

Soluzione. Applichiamo la terza proprietà delle potenze, avremo

$$a^{1-x^2} = a^{-3}$$

da cui

$$1-x^2 = -3 \quad x^2 = 4 \quad x = \pm 2$$

Esercizio 17. Risolvi la seguente equazione esponenziale $\sqrt{2\sqrt{4^x}} = 8$

Soluzione. Riscriviamo tutte le potenze con la base uguale a 2, ricordando che $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\left(2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^3 \quad 2^{\frac{1}{2}} 4^{\frac{x}{4}} = 2^3 \quad 2^{\frac{x}{2}} = 2^3 \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$$

da cui

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{2} \qquad x = 5$$

Esercizio 18. Risolvere le seguente equazione esponenziale:

$$\frac{3^{x^2+5}}{27^{2x}} = \frac{1}{3^{x+1}}$$

SOLUZIONE. Ricordiamo che la funzione esponenziale $y=a^x$ ha come dominio l'intero insieme dei numeri reali e come codominio solo l'insieme $\mathbb{R}^+$. Le condizioni di esistenza di un esponenziale sono pertanto solo quelle del suo esponente. Nelle due frazioni assegnate, gli esponenziali sono definiti per ogni valore dell'incognita x Pertanto

$$\frac{3^{x^2+5}}{3^{6x}}=\frac{1}{3^{x+1}}$$
$$3^{x^2+5}\cdot 3^{-6x}=3^{-x-1}$$
$$3^{x^2-6x+5}=3^{-x-1}$$

per cui

$$x^2-6x+5=-x-1 \quad x^2-5x+6=0 \quad \begin{matrix} \nearrow & 3 \\ \searrow & 2 \end{matrix}$$

ESERCIZIO 19. Risolvere le seguente equazione esponenziale $3^x\cdot 4^x=\frac{1}{144}$

SOLUZIONE. In questo caso per rendere le potenze con uguale base, basta ricordare la proprietà $(a^n\cdot b^n=(ab)^n)$. Avremo allora

$$12^x=12^{-2} \quad x=-2$$

ESERCIZIO 20. Risolvere le seguente equazione esponenziale $9\cdot 2^x=6^x$

SOLUZIONE. In questo caso per rendere le potenze con uguale base, basta ricordare la proprietà $((ab)^n=a^n\cdot b^n)$. Avremo allora

$$3^2\cdot 2^x=(2\cdot 3)^x \quad 3^2\cdot 2^x=2^x\cdot 3^x$$

cioè

$$3^2\cdot 2^x-2^x\cdot 3^x=0 \quad 2^x\left(3^2-3^x\right)=0$$

da cui

$$2^x=0\, nessuna\, soluzione \qquad 3^x=3^2 \qquad x=2$$

ESERCIZIO 21. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$\left(2^x-4\right)\left(3^x-27\right)=0$$

SOLUZIONE. Applichiamo la legge dell'annullamento del prodotto e avremo

$$2^x-4=0 \quad x=2$$
$$3^x-27=0 \quad x=3$$

ESERCIZIO 22. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$10^x-5\cdot 2^x-5^x+5=0$$

SOLUZIONE. (Facciamo attenzione! $5\cdot 2^x\neq 10^x$, perché $10^x=2^x\cdot 5^x$). Scriveremo allora

$$2^x\cdot 5^x-5\cdot 2^x-5^x+5=0$$

eseguendo un raccoglimento parziale (a due a due), si ottiene

$$2^x\left(5^x-5\right)-\left(5^x-5\right)=0$$

concludiamo il raccoglimento

$$\left(5^x-5\right)\left(2^x-1\right)=0$$

e applicando la legge dell'annullamento del prodotto, si ottiene (ricordando che $a^0=1$)

$$5^x=5 \quad x=1$$
$$2^x=1 \quad x=0$$

Esercizio 23. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$3^{x+1}+3^{x-2}+3^{x-1}+3^{x+2}=336$$

Soluzione. Ricordiamo che non esiste alcuna proprietà delle potenze nel caso della loro somma algebrica; possiamo osservare però che tutte le potenze hanno la stessa base e 3^x in comune. Procediamo pertanto al raccoglimento a fattor comune

$$3^x\left(3^1+3^{-2}+3^{-1}+3^2\right)=336$$

sommiamo i coefficienti numerici

$$3^x\left(3+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+9\right)=336$$

$$3^x\cdot\frac{112}{9}=336$$

essendo $336=112\cdot 3$ e dividendo

$$3^x=27 \qquad x=3$$

Esercizio 24. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$9^{4x-1}+2\cdot 9^{4x+1}-81^{2x+\frac{3}{2}}+6398=0$$

Soluzione. Riscriviamo tutte le potenze con base 9, avremo

$$9^{4x-1}+2\cdot 9^{4x+1}-9^{4x+3}+6398=0$$

raccogliamo a fattor comune 9^{4x}, avremo

$$9^{4x}\left(\frac{1}{9}+18-729\right)=-6398$$

pertanto

$$-\frac{\cancel{6398}}{9}\cdot 9^{4x}=-\cancel{6398}$$

$$9^{4x}=9 \quad 4x=1 \quad x=\frac{1}{4}$$

Esercizio 25. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$3^{2-x}+27^{1-\frac{x}{3}}=36\sqrt{3}$$

Soluzione. Riscriviamo tutte le potenze con base 3, avremo

$$3^{2-x}+3^{3-x}=36\sqrt{3}$$

raccogliamo a fattor comune 3^{-x}, avremo

$$3^{-x}\left(\cancel{9+27}\right)=\cancel{36}\sqrt{3}$$

pertanto

$$3^{-x}=3^{\frac{1}{2}}$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

Esercizio 26. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$3^x=\frac{5^{x+1}}{3}$$

Soluzione. In questo caso le due basi non possono essere uguagliate; la modalità risolutiva passa attraverso la possibilità di eguagliare gli esponenti delle due basi diverse

$$3^x = \frac{5}{3}\cdot 5^x$$

dividendo tutto per 5^x, che sappiamo essere diverso da zero per ogni valore di x

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$$

da cui

$$x = -1$$

Esercizio 27. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$4^x \cdot 2^x = 27^x$$

Soluzione. Anche in questo caso le due basi non possono essere uguagliate; procediamo come prima

$$8^x = 27^x$$

applicando le proprietà delle potenze si ha

$$2^{3x} = 3^{3x}$$

dividendo per 3^{3x} si ha

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = 1$$

da cui

$$x = 0$$

Esercizio 28. Risolvere

$$25^x + 5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

Soluzione. Questa equazione si può risolvere molto rapidamente osservando che $\left(\frac{1}{5}\right)^3 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 < 0$; ciò indica che l'equazione è impossibile perché il primo membro è sempre positivo.

Esercizio 29. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} = \frac{13}{6}$$

Soluzione. Non esiste alcuna proprietà delle potenze relativa alla loro somma! Per cui,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x} = \frac{13}{6}$$

($\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ sempre, e moltiplicando per $\left(\frac{3}{2}\right)^x$, si ha

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \frac{13}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 = 0$$

sostituendo $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, si ha

$$6t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{12} = \begin{matrix} \nearrow & \frac{2}{3} \\ \searrow & \frac{3}{2} \end{matrix}$$

e le soluzioni in x sono

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^x = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{-1} \quad x=-1$$
$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^x = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{1} \quad x=1$$

Esercizio 30. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$e^{3-x^2}\cdot e^{2x}=\frac{e^2}{e^{1-2x}}$$

Soluzione. L'esponenziale e^{1-2x} è sempre positivo e il suo esponente è sempre definito, pertanto,

$$\left(e^{3-x^2+2x}\right)\cdot e^{1-2x}=e^2$$

moltiplicando le due potenze, sommando i loro esponenti, si ha

$$e^{-x^2+4}=e^2$$

eguagliando gli esponenti

$$-x^2+4=2$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

Esercizio 31. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$2^x+3^x=\frac{1}{3}\cdot 2^x+\frac{1}{2}\cdot 3^x$$

Soluzione. Portiamo i termini simili nello stesso membro

$$2^x-\frac{1}{3}\cdot 2^x=\frac{1}{2}\cdot 3^x-3^x$$

sommiamo i termini simili

$$\frac{2}{3}\cdot 2^x=-\frac{1}{2}\cdot 3^x$$

dividendo per $\frac{3}{2}\cdot 3^x$ si ha

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=-\frac{3}{4}$$

l'esponenziale a sinistra non è mai negativo, per cui l'equazione risulta impossibile.

Esercizio 32. Risolvere le seguente equazione esponenziale

$$\frac{2^{-x}+2^{1-x}}{3}=\frac{5^{x+2}}{25^{x+1}}$$

Soluzione. Il denominatore della frazione al secondo membro è sempre diverso da zero. Riscriviamo

$$\frac{2^{-x}+2\cdot 2^{-x}}{3}=\frac{5^{x+2}}{5^{2x+2}}$$
$$\frac{\cancel{3}\cdot 2^{-x}}{\cancel{3}}=5^{x+2}\cdot 5^{-2x-2}$$

semplificando e applicando la proprietà delle potenze

$$2^{-x}=5^{-x}$$

dividendo per 5^{-x}, si ha

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}=1 \quad x=0$$

Esercizio 33. Risolvere l'equazione esponenziale $3^{2x}-3^x-6=0$

Soluzione. In questo caso la modalità risolutiva passa attraverso l'osservazione che $3^{2x}=(3^x)^2$, per cui riscrivendola, si ha $(3^x)^2-3^x-6=0$. Si può notare che se consideriamo come incognita 3^x, l'equazione ha le stesse caratteristica di un'equazione di 2° grado. Si può quindi risolvere utilizzando una sostituzione di variabile, ponendo $z=3^x$ e l'equazione ausiliaria in z diventa

$$z^2-z-6=0$$

che ammette come soluzioni $z_1=3$ e $z_2=-2$. Troviamo ora le soluzioni in x

$$\begin{array}{ll} 3^x=3 & x=1 \\ 3^x=-2 & imposs \end{array}$$

Si può anche evitare l'uso della variabile ausiliaria, considerando direttamente come incognita 3^x

$$3^x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}= \begin{array}{lll} \nearrow & 3^x=3 & x=1 \\ \searrow & 3^x=-2 & imposs \end{array}$$

Esercizio 34. Risolvere l'equazione esponenziale $9^x+3^x=5-3^{x+1}$

Soluzione. Scriviamo tutte le potenze con la stessa base 3

$$3^{2x}+3^x+3\cdot 3^x-5=0$$

sommando i termini simili

$$3^{2x}+4\cdot 3^x-5=0$$

Si può quindi risolvere utilizzando una sostituzione di variabile, ponendo $z=3^x$ e l'equazione ausiliaria in z diventa

$$z^2+4z-5=0$$

che ammette come soluzioni $z_1=-5$ e $z_2=1$. Troviamo ora le soluzioni in x

$$\begin{array}{ll} 3^x=1 & x=0 \\ 3^x=-5 & imposs \end{array}$$

Esercizio 35. Risolvere l'equazione esponenziale

$$\frac{2^{2x}}{1+2^x}=1-\frac{2^x}{2^x+1}$$

Soluzione. Introduciamo le condizioni di esistenza delle due frazioni: C.E.: $2^x\neq -1$. Tale condizione è sempre verificata per ogni valore di x. Moltiplichiamo per 2^x+1

$$2^{2x}=1+2^x-2^x$$

cioè

$$2^{2x}=1$$

$$2^{2x}=2^0 \quad x=0$$

Esercizio 36. Risolvere l'equazione esponenziale:

$$\frac{5^{4x-1}}{5^{x-1}}-\frac{5^{3x}}{5^{x-1}}-\frac{5^{1-x}}{5^{1-2x}}+5=0$$

Soluzione. le condizioni di esistenza non sono necessarie poiché le funzioni esponenziali, anche se traslate, non si annullano mai. Riscrivo

$$\frac{5^{4x}\cdot\frac{1}{5}}{5^x\cdot\frac{1}{5}}-\frac{5^{3x}}{5^x\cdot\frac{1}{5}}-\frac{5\cdot\frac{1}{5^x}}{5\cdot\frac{1}{5^{2x}}}+5=0$$

semplifico

$$\frac{5^{4x}}{5^x}-\frac{5^{3x}}{5^x\cdot\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}}+5=0$$

riscrivo, ricordando la proprietà delle potenze

$$5^{3x}-5\cdot 5^{2x}-5^x+5=0$$

pongo $5^x=t$ e ottengo

$$t^3-5t^2-t+5=0$$

eseguo un raccoglimento parziale

$$\begin{aligned} t^2(t-5)-(t-5) &= 0\\ (t-5)\left(t^2-1\right) &= 0 \end{aligned}$$

le soluzioni saranno pertanto

$$\begin{array}{ccc} t_1=5 & t_2=-1 & t_3=1\\ 5^x=5\;\; x=1 & 5^x=-1\;\; impos & 5^x=1\;\; x=0 \end{array}$$

Esercizio 37. Risolvere

$$\frac{3^{4x-2}}{3^{x-2}}-2\cdot 3^{2x+1}-\frac{57}{3^{1-x}}+84=0$$

Soluzione. procediamo in modo simile a prima

$$\frac{3^{4x}\cdot\frac{1}{9}}{3^x\cdot\frac{1}{9}}-2\cdot 3\cdot 3^{2x}-\frac{57}{3\cdot\frac{1}{3^x}}+84=0$$

semplifichiamo, tenendo conto che 3^x non può mai essere uguale a 0 e quindi non può dare soluzioni aggiuntive

$$3^{3x}-6\cdot 3^{2x}-19\cdot 3^x+84=0$$

sostituiamo $3^x=t$, da cui

$$t^3-6t^2-19t+84=0$$

applicando la scomposizione con il metodo di Ruffini e osservando che il polinomio si annulla per $t=7,3,-4$, infatti

$$P(3)=27-54-57+84=0$$

$$P(7)=343-294-133+84=0$$

$$P(-4)=-64-96+76+84=0$$

le soluzioni saranno quindi

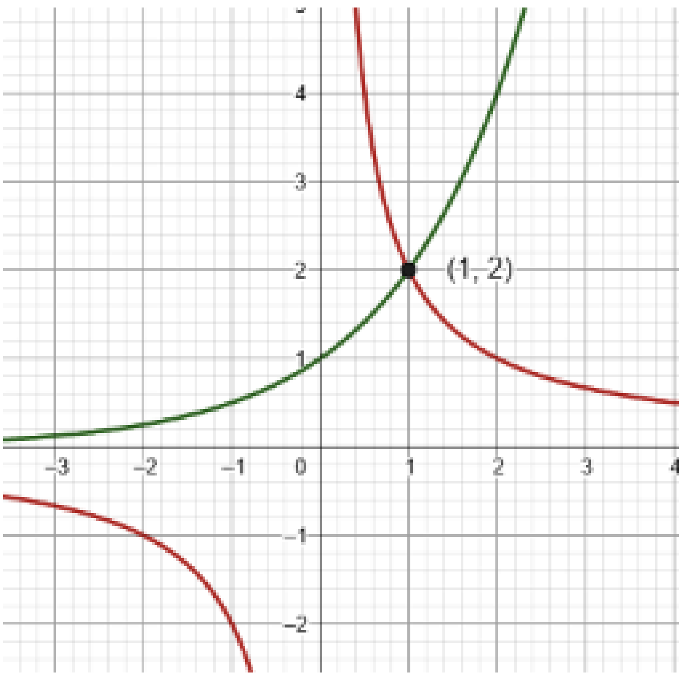
$$\begin{array}{rl} 3^x=3 & x=1\\ 3^x=7 & x=\log_3 7\\ 3^x=-4 & imposs \end{array}$$

Risoluzione grafica delle equazioni esponenziali. Ricordiamo che la funzione $y = a^x$ è sempre positiva e interseca sempre l'asse y nel punto di coordinate $(0;1)$. Pertanto, per rappresentare graficamente una tale funzione basta calcolare il valore dell'ordinata per due altri punti, uno con ascissa negativa e uno con ascissa positiva e poi ricordare l'andamento della funzione. Se $0 < a < 1$ la funzione è decrescente; se $a > 1$, la funzione è crescente.

Esercizio 38. Risolvere graficamente

$$2^x = \frac{2}{x}$$

Soluzione. Questa equazione non rientra in nessuno dei casi precedenti; infatti, come si può osservare l'incognita x compare sia come esponente, ma anche come base di una potenza. In questi casi si può risolvere attraverso la rappresentazione delle funzioni che si riconoscono nell'equazione. Si può porre $y = 2^x$, per cui si avrà anche $y = \frac{2}{x}$, per la proprietà transitiva. La prima è una funzione esponenziale, la seconda è l'equazione di una iperbole equilatera riferita ai propri asintoti. La soluzione sarà rappresentata dal valore dell'ascissa del loro punto di intersezione.



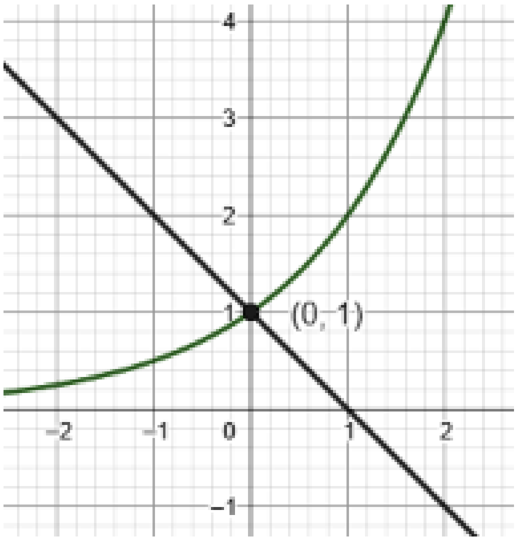
La soluzione sarà $x = 1$.

Esercizio 39. Risolvere graficamente

$$2^x + x = 1$$

Soluzione. Questa equazione non rientra in nessuno dei casi precedenti; infatti, come si può osservare l'incognita x compare sia come esponente, ma anche come base di una potenza. In questi casi si può risolvere attraverso la rappresentazione delle funzioni che si riconoscono nell'equazione. Si può porre $y = 2^x$, per cui si avrà anche $y = 1 - x$, per la proprietà transitiva. Si può riscriverla con il sistema

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 1 - x \end{cases}$$



La soluzione sarà $x = 0$.

Esercizio 40. Risolvere graficamente

$$(x+2)(1-2x) = x \cdot 2^x + 2^{x+1}$$

Soluzione. Questa equazione non rientra in nessuno dei casi precedenti; infatti, come si può osservare l'incognita x compare sia come esponente, ma anche come base di una potenza. L'equazione si può riscrivere come [facciamo attenzione, perché $y = \frac{(x+2)(1-2x)}{(x+2)}$ e $y = 1-2x$ non hanno lo stesso dominio]

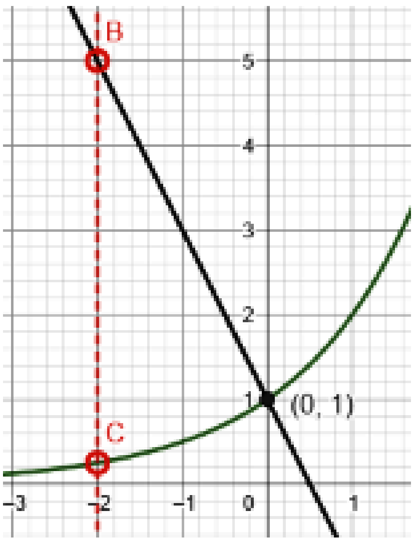
$$(x+2)(1-2x) = 2^x(x+2)$$

cioè

$$2^x = \frac{(x+2)(1-2x)}{x+2}$$

Per cui, con $x \neq -2$

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 1-2x \end{cases}$$



La soluzione sarà $x = 0$. Ma l'equazione associata non è fratta, per cui bisogna verificare se il valore eliminato dalle C.E. è una possibile soluzione.

$$0 \cdot 5 = -2 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \quad 0 = 0$$

Anche $x = -2$ sarà quindi una soluzione.

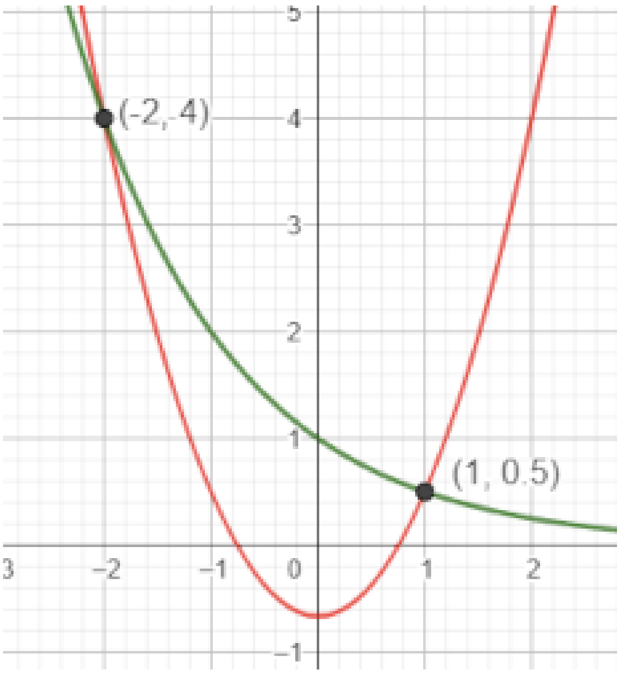
Esercizio 41. Risolvere graficamente

$$\frac{7}{6}x^2 - \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Soluzione. Questa equazione non rientra in nessuno dei casi precedenti; infatti, come si può osservare l'incognita x compare sia come esponente, ma anche come base di una potenza. L'equazione si può riscrivere come un sistema con la sostituzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y = \frac{7}{6}x^2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

Si ha pertanto una funzione esponenziale con $0 < a < 1$ e una funzione quadratica che descrive una parabola con concavità verso l'alto $(a > 0)$ e $V(0; -\frac{2}{3})$



Le soluzioni sono $x_1 = -2$ e $x = 1$.

(453)

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Per la risoluzione delle disequazioni bisogna ricordare bene che la funzione esponenziale con $0 < a < 1$ è decrescente, cioè se $x_2 > x_1$, allora $f(x_2) < f(x_1)$. Se invece, la base $a > 1$, allora se $x_2 > x_1$, allora $f(x_2) > f(x_1)$, cioè, la funzione è crescente.

Esercizio 42. Risolvere la disequazione: $2^x > 16$

Soluzione. Osservando che $16 = 2^4$, si ha $2^x > 2^4$. Poiché le basi sono uguali e > 1, si può passare al confronto tra gli esponenti

$$x > 4$$

Esercizio 43. Risolvere la disequazione: $3^{x-1} > 9$

Soluzione. Osservando che $9 = 3^2$, le due potenze hanno la stessa base $3 > 1$, per cui

$$x - 1 > 2 \quad x > 3$$

Esercizio 44. Risolvere la disequazione: $3^{1-4x} > 9^{x+1}$

Soluzione. Osservando che $9 = 3^2$, possiamo riscrivere come

$$3^{1-4x} > 3^{2x+2}$$

le due potenze hanno la stessa base $3 > 1$, per cui

$$1-4x > 2x+2 \quad x < -\tfrac{1}{6}$$

Esercizio 45. Risolvere la disequazione: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \cdot \frac{3}{2} > 1$

Soluzione. Moltiplichiamo entrambi i membri per $\frac{2}{3}$, si ha

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} > \frac{2}{3}$$

le due potenze hanno la stessa base $\frac{2}{3} < 1$ (la funzione esponenziale è quindi decrescente), per cui

$$x-2 < 1 \quad x < 3$$

Esercizio 46. Risolvere la disequazione:

$$\frac{4^x \cdot 16^{x+1}}{8^{x-3}} < 1$$

Soluzione. Il denominatore 8^{x-3} è sempre maggiore di zero. Tutte le potenze si possono ridurre alla base $2 > 1$. Possiamo riscrivere come

$$\frac{2^{2x} \cdot 2^{4x+4}}{2^{3x-9}} < 2^0$$

applicando le proprietà delle potenze si ha

$$2^{2x+4x+4-3x+9} < 2^0$$

cioè

$$2^{3x+13} < 2^0$$

pertanto, confrontando gli esponenti

$$3x+13 < 0 \quad x < -\tfrac{13}{3}$$

Esercizio 47. Risolvere la disequazione:

$$\sqrt[x]{\frac{1}{2}} < \frac{1}{8}$$

Soluzione. Tutte le potenze si possono ridurre alla base $\frac{1}{2} < 1$. Possiamo riscrivere come

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

con $\forall x \in \mathbb{N}$; confrontando gli esponenti, tenendo conto che la base è minore di 1 (funzione decrescente), si ha

$$\frac{1}{x} > 3$$

cioè

$$x < \frac{1}{3}$$

la disequazione risulta pertanto impossibile per le condizioni poste.

Esercizio 48. Prima disequazione esponenziale

$$2^{\frac{x^2-x}{x+1}} \leq 1$$

Soluzione. L'esponente è composto da una frazione razionale; siamo, pertanto, tenuti a discutere le condizioni di esistenza della frazione, che consistono nello scartare i valori che rendono il DENOMINATORE NULLO. Pertanto,

$$C.E.\ \ x \neq -1$$

procediamo a risolvere la disequazione elementare, riscrivendo $1 = 2^0$; si avrà

$$2^{\frac{x^2-x}{x+1}} \leq 2^0$$

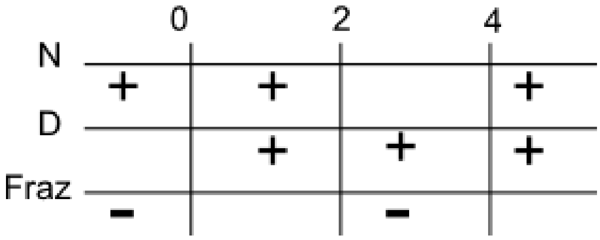
da cui

$$\frac{x^2-x}{x+1} \leq 0$$

questa è una disequazione fratta e studieremo il segno del Numeratore e del Denominatore per poi ottenere il segno della frazione

$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & x^2 - x \geq 0 \\ & x(x-1) \geq 0 \\ & x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ & \\ D > 0 & x > -1 \end{array}$$

Rappresentiamo tali intervalli sulla retta per ottenere il segno della frazione



la disequazione sarà verificata negli intervalli $x < -1 \ \vee \ 0 \leq x \leq 1$

Esercizio 49. Risolvere $3^x + 3^{x+2} < 3^{x-1} + 87$

Soluzione. Applicando le proprietà delle potenze riscrivo

$$3^x + 3^2 \cdot 3^x - \frac{1}{3} \cdot 3^x < 87$$

raccolgo a fattor comune

$$3^x \left(1 + 9 - \frac{1}{3}\right) < 87 \qquad \frac{29}{3} \cdot 3^x < 87$$

$$3^x < \frac{87 \cdot 3}{29} = 9 = 3^2$$

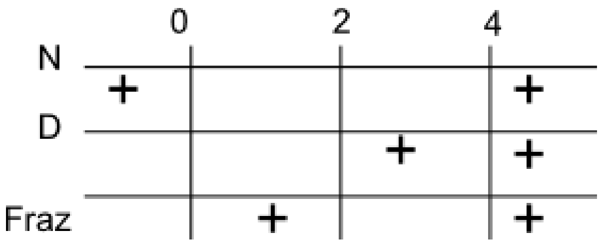
le soluzioni saranno $x < 2$.

Esercizio 50. Risolvere $\dfrac{5^{x^2-4x} - 1}{x-2} \geq 0$

Soluzione. questa è una disequazione fratta che presenta al numeratore un esponenziale; la studieremo come tutte le disequazioni fratte valutando il segno del numeratore e del denominatore per poi determinare il segno della frazione

$$\begin{array}{ll} N \geq 0 & 5^{x^2-4x}-1 \geq 0 \\ & 5^{x^2-4x} \geq 5^0 \\ & x^2-4x \geq 0 \\ & x(x-4) \geq 0 \\ & x \leq 0 \ \vee \ x \geq 4 \\ D > 0 & x > 2 \end{array}$$

Rappresentiamo tali intervalli sulla retta per ottenere il segno della frazione



:

le soluzioni saranno $0 \leq x < 2 \ \vee \ x \geq 4$.

Esercizio 51. Risolvere

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+2^{-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}<7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$$

Soluzione. Riscriviamo la disequazione con potenze aventi tutte la base $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}<7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$$

raccogliamo a fattor comune $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ al primo membro

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}\right)<7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$$

da cui

$$\frac{\cancel{7}}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}<\cancel{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$$

confrontando gli esponenti e osservando che $\frac{1}{2}<1$, si ottiene

$$x+2>3x+2$$

l'intervallo delle soluzioni è

$$x<0$$

Esercizio 52. Risolvere

$$\frac{5^x}{5}<4^{x-1}$$

Soluzione. In questo caso le potenze non sono riconducibili alla stessa base, e la strategia risolutiva passa per la possibilità di eguagliare gli esponenti delle due basi diverse, applicando le proprietà delle potenze, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$$\frac{1}{5} \cdot 5^x < \frac{1}{4} \cdot 4^x$$

la disequazione si può riscrivere come

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x < \frac{5}{4}$$

da cui

$$x < 1$$

Esercizio 53. Risolvere

$$4^{2x+1} - 16^{x-1} > 7 \cdot \left(3^{2x-1} + 3^{2x}\right)$$

Soluzione. Riscriviamo la disequazione con potenze aventi base 4 al numeratore e base 3 al denominatore

$$4^{2x+1} - 4^{2x-2} > 7 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} + 3^{2x}\right)$$

applichiamo la proprietà delle potenze

$$4 \cdot 4^{2x} - \frac{1}{16} \cdot 4^{2x} > 7 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 3^{2x}\right)$$

da cui

$$\frac{63}{16} \cdot 4^{2x} > \frac{28}{3} \cdot 3^{2x}$$

le due potenze hanno gli stessi esponenti, per cui (la divisione è possibile perché 3^{2x} è sempre maggiore di zero

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} > \frac{28 \cdot 16}{3 \cdot 63} = \frac{64}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

l'intervallo delle soluzioni è

$$x > \frac{3}{2}$$

Esercizio 54. Risolvere

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2x} - \frac{9}{4}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \leq 0$$

Soluzione. Riscriviamo la disequazione con potenze aventi base $\frac{3}{2}$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq 0$$

applichiamo la proprietà dell'annullamento del prodotto

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 & x \geq 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0 & x \geq \frac{3}{2} \end{array}$$

da cui, studiando il segno del prodotto dei due fattori l'intervallo delle soluzioni è

$$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Esercizio 55. Risolvere

$$e^{-x}\left(x^2 - 5x + 4\right) \leq 0$$

SOLUZIONE. L'esponenziale e^{-x} è sempre positivo, per cui il segno del prodotto è dato dal polinomio di secondo grado

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

risolvendo si ha

$$1 \leq x \leq 4$$

ESERCIZIO 56. Risolvere

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$$

SOLUZIONE. Riscriviamo come

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$$

introduciamo la variabile ausiliaria $2^x = t$ e avremo

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0$$

risolviamo questa disequazione ausiliaria nella variabile t

$$1 \leq t \leq 2$$

troviamo ora le soluzioni in x, sapendo che $t = 2^x$; avremo

$$\begin{array}{cc} 2^x \geq 2^0 & x \geq 0 \\ 2^x \leq 2 & x \leq 1 \end{array}$$

l'intervallo delle soluzioni è

$$0 \leq x \leq 1$$

ESERCIZIO 57. Risolvere

$$3 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{-x} - 1 > 0$$

SOLUZIONE. Riscriviamo come

$$3 \cdot 2^x - 2 \cdot \frac{1}{2^x} - 1 > 0$$

questa è una disequazione fratta, il cui denominatore è però sempre positivo; moltiplichiamo tutto per 2^x

$$3 \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 > 0$$

introducendo la variabile ausiliaria si ha

$$3t^2 - 2t - 1 > 0$$

risolvendo si ha

$$t < -\tfrac{1}{3} \vee t > 1$$

troviamo ora le soluzioni in x, sapendo che $t = 2^x$; avremo

$$\begin{array}{cc} 2^x < -\frac{1}{3} & imposs \\ 2^x > 2^0 & x > 0 \end{array}$$

l'intervallo delle soluzioni è

$$x > 0$$

ESERCIZIO 58. Risolvere

$$e^{3x} + 4e^{2x} + e^x - 6 \geq 0$$

Soluzione. La funzione esponenziale di base e è la più usata in ambito teorico e non solo. Il numero e è un numero trascendente (non ottenibile come soluzione di una equazione) detto di Nepero e vale $e = 2,718281......$; introducendo la variabile ausiliaria $e^x = t$, si ha

$$t^3 + 4t^2 + t - 6 \geq 0$$

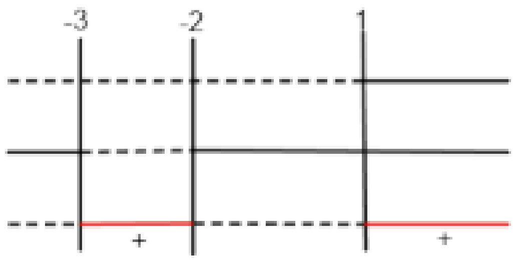
scomponendo con la Regola di Ruffini, osservando che per $t = 1$, il polinomio al primo membro si annulla, si ha

$$\left(t - 1 \right) \left(t^2 + 5t + 6 \right) \geq 0$$

risolviamo come per le disequazioni fratte

$$\begin{array}{lll} 1^\circ fattore & t - 1 \geq 0 & t \geq 1 \\ 2^\circ fattore & t^2 + 5t + 6 \geq 0 & t \leq -3 \vee t \geq -2 \end{array}$$

le soluzioni in t sono



$$-3 \leq t \leq -2 \quad t \geq 1$$

le soluzioni in x saranno

$$\begin{array}{ll} -3 \leq e^x \leq -2 & impossibile \\ e^x \geq 1 = e^0 & x \geq 0 \end{array}$$

Esercizio 59. Risolvere

$$\frac{2^x - 8}{3^x + 1} > 0$$

Soluzione. La disequazione è fratta e richiede quindi lo studio delle condizioni di esistenza, che in questo caso si traducono nello studio di $3^x + 1 \neq 0$, per garantire che la frazione non perda di significato.

Studio delle C.E.

$$3^x \neq -1$$

la disuguaglianza è sempre vera essendo la funzione esponenziale $y = 3^x$ sempre positiva.

Risolviamo come per le disequazioni fratte

$$\begin{array}{lll} N > 0 & 2^x > 2^3 & x > 3 \\ D > 0 & 3^x + 1 > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

le soluzioni saranno

$$x > 3$$

Esercizio 60. Risolvere

$$\frac{2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2}{4 \cdot 3^x - 3^{2x+1} - 1} < 0$$

Soluzione. La disequazione è fratta e richiede quindi lo studio delle condizioni di esistenza, che in questo caso si traducono nello studio di $4 \cdot 3^x - 3^{2x+1} - 1 \neq 0$, per garantire che la frazione non perda di significato.

Studio delle C.E.

$$4\cdot 3^x-3^{2x+1}-1\neq 0$$

Riscriviamo, cambiando anche i segni

$$3\cdot 3^{2x}-4\cdot 3^x+1\neq 0$$

ponendo $3^x=t$, avremo $3t^2-4t+1\neq 0$. Pertanto, risolvendo in t, si hanno le soluzioni

$$t_1\neq\frac{1}{3}\qquad t_1\neq 1$$

e rispetto a x

$$C.E.\quad \begin{array}{ll} 3^x\neq\frac{1}{3} & x\neq -1\\ 3^x\neq 1 & x\neq 0\end{array}$$

Risolviamo ora la disequazione

$$\begin{array}{ll} N>0 & 2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2>0\\ D>0 & -1<x<0\end{array}$$

risolviamo la disequazione al numeratore con la solita sostituzione $2^x=t$,

$$2t^2-5t+2>0$$

avremo $t<\frac{1}{2}\ \vee t>2$; le soluzioni in x saranno

$$\begin{array}{ll} 2^x<\frac{1}{2} & x<-1\\ 2^2>2 & x>1\end{array}$$

riassumendo avremo

$$\begin{array}{ll} N>0 & x<-1\ \vee x>1\\ D>0 & -1<x<0\end{array}$$

poiché la frazione deve essere negativa, prenderemo gli intervalli discordi, cioè

$$x<-1\ \vee\ -1<x<0\ \vee\ x>1$$

Esercizio 61. Risolvere

$$\frac{2^x+1}{2^x-1}-\frac{2^x}{2^x+1}\leq\frac{7}{3}$$

Soluzione. Studio delle condizioni di esistenza,

$$\begin{array}{ll} 2^x\neq -1 & \forall x\\ 2^x\neq 1 & x\neq 0\end{array}$$

Il minimo comune multiplo tra i denominatori è $(2^x-1)(2^x+1)$.

$$\frac{3(2^x+1)^2-3\cdot 2^{2x}+3\cdot 2^x-7(2^x-1)(2^x+1)}{3(2^x-1)(2^x+1)}\leq 0$$

svolgendo e moltiplicando entrambi i membri per 3

$$\frac{\cancel{3\cdot 2^{2x}}+6\cdot 2^x+3\cancel{-3\cdot 2^{2x}}+3\cdot 2^x-7\cdot 2^{2x}+7}{(2^x-1)(2^x+1)}\leq 0$$

$$\frac{-7\cdot 2^{2x}+9\cdot 2^x+10}{(2^x-1)(2^x+1)}\leq 0$$

ponendo $2^x=t>0$ con $t\neq\pm 1$, avremo

$$\frac{-7t^2+9t+10}{t^2-1}\leq 0$$

Risolviamo ora la disequazione

$$\begin{array}{ll} N\geq 0 & 0<t<1\ \vee\ t\geq 2\\ D>0 & t>1\end{array}$$

le soluzioni per 2^x saranno

$$\begin{array}{ll} 0<2^x<1 & 2^x \geq 2 \\ 2^x>1 & x>0 \end{array}$$

e rispetto a x

$$x<0 \vee x \geq 1$$

Esercizio 62. Risolvere

$$\frac{1}{2^x-4}+\frac{1}{2^x+4}>\frac{16}{4^x-16}$$

Soluzione. Studio delle condizioni di esistenza,

$$\begin{array}{ll} 2^x \neq 4 & x \neq 2 \\ 2^x \neq -4 & \forall x \\ 2^{2x} \neq 2^4 & x \neq 2 \end{array}$$

Il minimo comune multiplo tra i denominatori è $(2^x-4)(2^x+4)=2^{2x}-16$.

$$\frac{2^x+4+2^x-4-16}{(2^x-4)(2^x+4)} \leq 0$$

svolgendo

$$\frac{2 \cdot 2^x-16}{(2^x-4)(2^x+4)} \leq 0$$

$$\frac{2^x-2^3}{(2^x-4)(2^x+4)} \leq 0$$

Risolviamo ora la disequazione

$$\begin{array}{lll} N \geq 0 & x \geq 3 & \\ D>0 & 2^{2x}>2^4 & x>2 \end{array}$$

le soluzioni

$$2<x \leq 3$$

Sistemi di equazioni e disequazioni.

Esercizio 63. Risolvere

$$\begin{cases} 2^x \cdot 4^{x+y}=\sqrt{2} \\ 4^y \cdot 2^x=8 \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo il sistema in modo che tutte le potenze di ogni equazione abbiano la stessa base

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^{2x+2y}=2^{\frac{1}{2}} \\ 2^{2y} \cdot 2^x=2^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^{3x+2y}=2^{\frac{1}{2}} \\ 2^{2y+x}=2^3 \end{cases}$$

Riscriviamo confrontando gli esponenti di potenze con base uguale

$$\begin{cases} 3x+2y=\frac{1}{2} \\ x+2y=3 \end{cases} \qquad 1^a-2^a \begin{cases} x+2y=3 \\ x=-\frac{5}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{17}{8} \\ x=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

Esercizio 64. Risolvere

$$\begin{cases} 3^x-3^y=-\frac{8}{3} \\ 3^x+3^y=\frac{10}{3} \end{cases}$$

Soluzione. In questo caso entrambe le equazioni contengono potenze con la stessa base e quindi direttamente confrontabili. Riscrivo applicando il criterio della riduzione, cioè sostituendo alla prima equazione la somma della 2^a con la prima

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = \frac{10}{3} \\ \cancel{2} \cdot 3^x = \frac{\cancel{2}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x + 3^y = \frac{10}{3} \\ 3^x = 3^{-1} \end{cases}$$

Avremo

$$\begin{cases} x = -1 \\ 3^y = \frac{9}{3} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 65. Risolvere

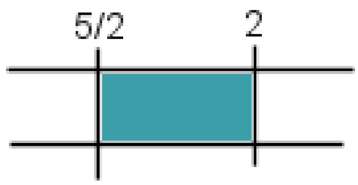
$$\begin{cases} 3^{x+1} > 27 \\ 4^x < 32 \end{cases}$$

Soluzione. Questo semplice sistema si risolve trovando le soluzioni di ogni disequazione e componendole individuando gli intervalli nei quali entrambe sono soddisfatte.

Riscriviamo le disequazione in modo che in entrambi le potenze abbiano la stessa base

$$\begin{cases} 3^{x+1} > 3^3 \\ 2^{2x} < 2^5 \end{cases}$$

Soluzione della prima disequazione $x+1 > 3$, per cui $x > 2$
Soluzione della seconda disequazione $2x < 5$, per cui $x < \frac{5}{2}$



Le soluzioni comuni sono nell'intervallo $\frac{5}{2} < x < 2$.

Esercizio 66. Risolvere

$$\begin{cases} x\left(2^{3x} - 16\right) > 0 \\ 4^x - 16 \le 0 \end{cases}$$

Soluzione. Troviamo le soluzioni di ogni disequazione e componendole individuando gli intervalli nei quali entrambe sono soddisfatte.

Soluzione della prima disequazione $x\left(2^{3x} - 16\right) > 0$, per cui

$$\begin{array}{ll} 1^\circ \, fattore & x > 0 \\ 2^\circ \, fattore & x > \frac{4}{3} \end{array}$$

da cui si ottiene $x < 0 \vee x > \frac{4}{3}$
Soluzione della seconda disequazione $2^{2x} \le 2^4$, per cui $x \le 2$
Le soluzioni comuni sono

$$x < 0 \vee \frac{4}{3} < x \le 2$$

Esercizio 67. Risolvere

$$\begin{cases} 2^{x+1} + 2^{x-1} < 20 \\ 4^x - 2^x > 2 \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo le disequazione in modo che in entrambi le potenze abbiano la stessa base

$$\begin{cases} 2\cdot 2^x + \frac{1}{2}\cdot 2^x < 20 \\ 2^{2x} - 2^x - 2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{2}\cdot 2^x < 20 \\ 2^{2x} - 2^x - 2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x < 2^2 \\ 2^{2x} - 2^x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ 2^x = \frac{1\pm 3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2 \\ 2^x < -1 \ \vee \ 2^x > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

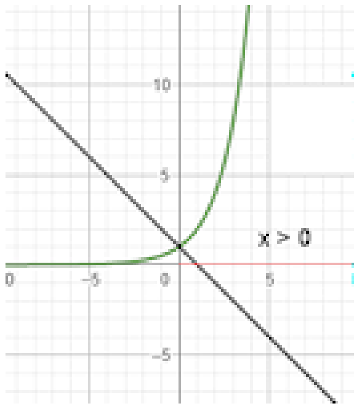
Le soluzioni comuni sono nell'intervallo $1 < x < 2$.

Risoluzione grafica di disequazioni esponenziali.

Esercizio 68. Risolvere graficamente la seguente disequazione esponenziale $2^x + x > 1$

Soluzione. Anche qui ricorriamo alla risoluzione grafica poiché nella disequazione l'incognita x compare sia come esponente sia come base di una potenza. In una tale condizione non possiamo adottare le tecniche algebriche illustrate.

Riscriviamo pertanto la disequazione come $2^x > 1 - x$. Rappresentiamo graficamente $y = 2^x$ e $y = 1 - x$, cercando poi gli intervalli nei quali la funzione esponenziale ammette valori dell'ordinata maggiori di quelli della retta.



Esercizio 69. Risolvere graficamente la seguente disequazione esponenziale

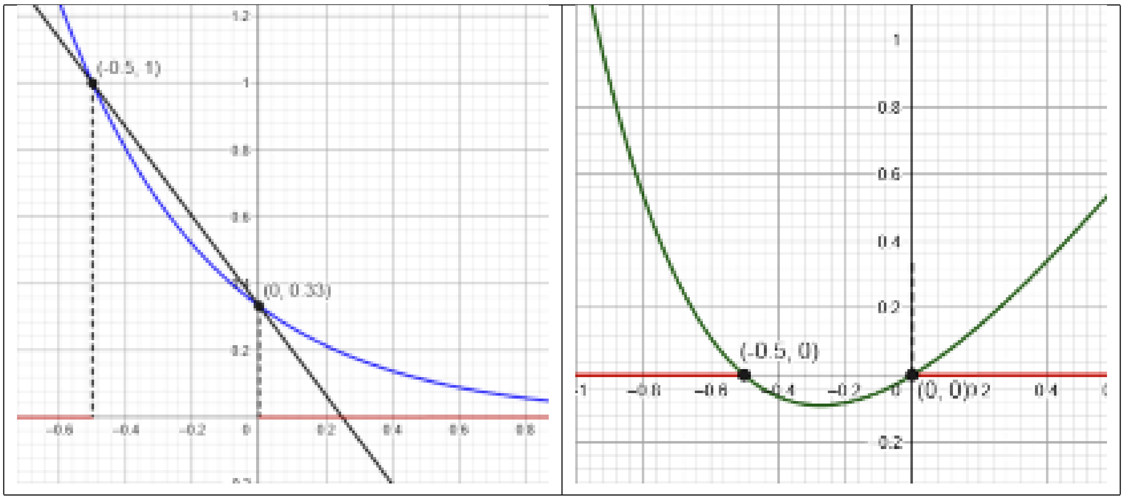
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} > -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

Soluzione. Anche qui ricorriamo alla risoluzione grafica poiché nella disequazione l'incognita x compare sia come esponente sia come base di una potenza. In una tale condizione non possiamo adottare le tecniche algebriche illustrate.

Possiamo risolvere in due modi a seconda degli strumenti che si utilizzano.

1° modo: rappresentare graficamente le due funzioni $y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$ e $y_2 = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ e verificare dal grafico quali sono gli intervalli dei valori di x per i quali $y_1 > y_2$ (si veda il grafico di sinistra).

2° modo: rappresentare graficamente con un software la funzione $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ e determinare gli intervalli in cui la funzione è positiva. (grafico di destra).



Dominio delle funzioni esponenziali.

Esercizio 70. Determina il dominio della seguente funzione

$$y=\frac{1}{e^x-1}$$

Soluzione. La frazione è definita se il suo denominatore è diverso da zero, per cui $e^x \neq e^0$

$$D:\mathbb{R}-\{0\}$$

Esercizio 71. Determina il dominio della seguente funzione

$$y=\frac{e^x}{x+1}+\frac{x+1}{e^{x+1}}$$

Soluzione. Le prima frazione è definita se $x \neq -1$; la seconda frazione è sempre definita essendo l'esponenziale sempre maggiore di zero; pertanto

$$D:\mathbb{R}-\{-1\}$$

Esercizio 72. Determina il dominio della seguente funzione

$$y=e^{-\sqrt{x^2-1}}$$

Soluzione. L'esponenziale $y=a^x$ è sempre definito sull'intero insieme dei numeri reali; l'esponenziale del tipo $y=a^{f(x)}$ è definito quando lo è $f(x)$; pertanto

$$x^2-1\geq 0$$

per cui

$$D:x\leq -1 \,\vee\, x\geq 1$$

Esercizio 73. Determina il dominio della seguente funzione

$$y=\frac{e^{\sqrt{\frac{x}{x+1}}}}{x}$$

Soluzione. In questo caso si devono studiare sia il numeratore sia il denominatore della frazione ad esponente

$$\frac{x}{x+1} > 0 \quad x < -1 \vee x > 0$$
$$x \neq 0$$

per cui

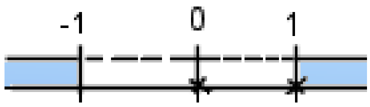
$$D : x < -1 \vee x > 0$$

Esercizio 74. Determina il dominio della seguente funzione

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2}$$

Soluzione. Studiamo la frazione

$$\begin{array}{ccc} Num & x^2 - 1 \geq 0 & x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ Den & t^2 - 3t + 2 \neq 0 & t \neq 1, 2 \\ & x \neq 0 & x \neq 1 \end{array}$$



per cui

$$D : x \leq -1 \vee x > 1$$

Applicazioni delle funzioni esponenziali.

Esercizio 75. Un punto materiale si muove su una retta secondo la legge oraria $x_1(t) = e^{t^2 - 3t + 2}$ con $t > 0$, nella quale tutte le grandezze sono espresse in unità S.I. Determina in quale ulteriore istante di tempo il punto materiale occupa la stessa posizione che occupa all'istante $t_1 = 1\,s$.

Soluzione. Al tempo $t_1\,s$, il punto materiale occupa la posizione, rispetto all'origine di riferimento,

$$x_1(1) = e^0 = 1\,m$$

Occuperà la stessa posizione quando

$$e^{t^2 - 3t + 2} = e^0$$

cioè

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

risolvendo

$$t_1 = 1\,s \quad t_2 = 2\,s$$

Esercizio 76. Per descrivere l'evoluzione dei microprocessori viene spesso citata una versione modificata della famosa legge formulata nel 1965 da G. Moore, cofondatore di Intel. Secondo la legge di Moore, di natura empirica, il numero di transistor presenti in un microprocessore raddoppia ogni 24 mesi. Successivamente tale periodo venne abbassato a 18 mesi. Il processore Pentium II di Intel, commercializzato nel 1997, conteneva circa 7,5 milioni di transistor. In base alla legge di Moore «aggiornata», stima approssimativamente quale dovrebbe essere il numero di transistor contenuti in un Pentium EE del 2005.

Soluzione. Possiamo esprimere la crescita dei transistori mediante una funzione esponenziale. Se si considera il raddoppio ogni 24 mesi, avremo

$$N = N_0 2^t$$

e sostituendo i valori numerici, e considerando t in anni. Considerando che $2005 - 1997 = 8\,anni = 96\,mesi$, per cui $\frac{96}{18} = \frac{16}{3}$

$$N\,(2005) = 7,5 \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{16}{3}} = 3,02 \cdot 10^8$$

Esercizio 77. Una coltura di cellule presenta inizialmente 5.000.000 di cellule e ne muoiono la metà ogni 10 minuti. Quante se ne contano dopo 5 minuti? E dopo 7 minuti? Dopo quanto tempo ne resteranno meno di 1000?

Soluzione. In questo caso si tratta di un andamento decrescente, per cui l'esponente della funzione esponenziale dovrà essere negativo, mentre la base sarà $\frac{1}{2}$ (dimezzamento). Poiché

$$2,5 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

dà $t = 1$, consideriamo 10 minuti corrispondenti a una unità di tempo e avremo

$$N\,(5) = 5 \cdot 10^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} = 3535534$$

$$N\,(7) = 5 \cdot 10^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{10}t} = 3077861$$

Infine conoscendo le cellule iniziali e finali e dovendo trovare il tempo, avremo

$$10^3 = 5 \cdot 10^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{10^3}{5 \cdot 10^6} = \frac{1}{5000}$$

da cui $t = 12,3$ e considerando che ogni unità di t vale 10 minuti, avremo $t \simeq 123$ minuti.